अध्यायः 15

आलेखद्वारा परिचयः

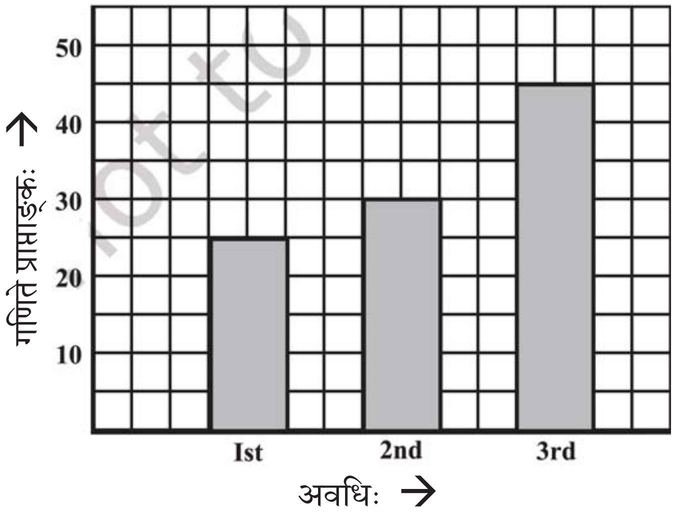
15.1 भूमिका

किं भवन्तः समाचार-पत्रेषु, दूरदर्शने, पत्रिकायां, पुस्तकादिषु आलेखं दृष्टवन्तः ? आलेखानाम् उद्देश्यः संख्यात्मक-तथ्यानां चित्रद्वारा प्रदर्शनम् अस्ति यस्मात् ते शीघ्रतया सरलरीत्या स्पष्टतया च अवगच्छेयुः । एतादृशः आलेखः एकत्रित-गणनानां चित्रद्वारा प्रदर्शितम् भवति । गणनां तालिकाद्वारा अपि प्रस्तौतुं शक्यते अपितु आलेखद्वारा प्रदर्शनबोधने बहुसरलं भवति । गणनानाम् आकर्षणम् अथवा तोलनं दर्शयितुम् एतत् बहु-उपयुक्तम् अस्ति । वयम् इदानीं यावत् अनेकप्रकारकम् आलेखं दृष्टवन्तः । आगच्छन्तु तान् स्मरामः ।

15.1.1 एकः दण्डः आलेखः

एकः दण्डः आलेखः विभिन्न-श्रेणीनां मध्ये तोलनक्रियायां सहायकः भवति । अस्मिन् द्वौ अथवा अधिक-

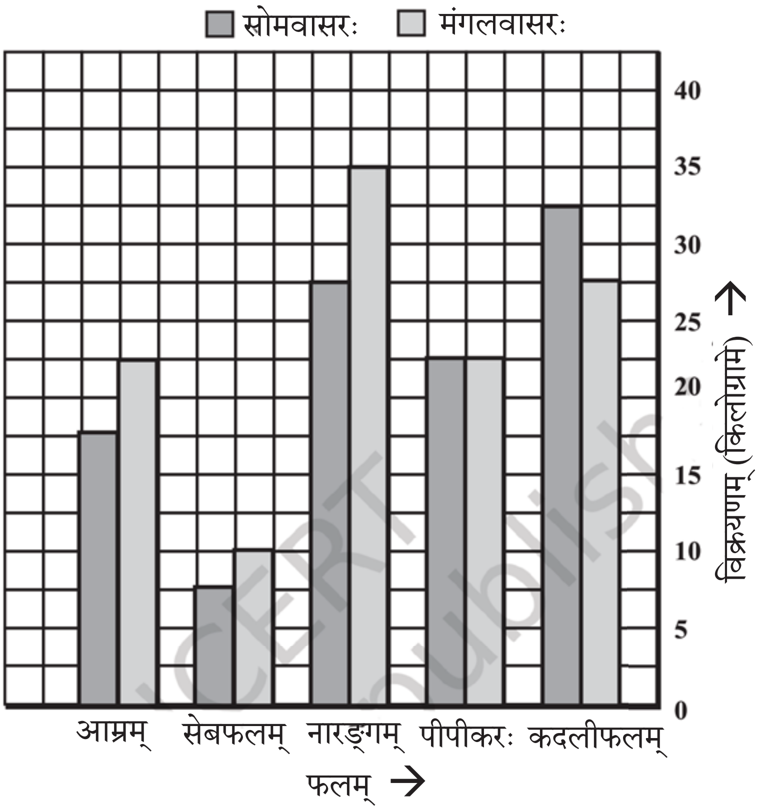
15.1 आकृतौ दण्ड-आलेखः अनुद्वारा तिसृणां सत्रीय-परीक्षाणां गणिते प्राप्ताङ्कान् दर्शयति । एतत् तस्य प्रदर्शनस्य तोलनं सरलतया सम्पादने साहाय्यं करोति । वयं कथयितुम् अर्हामः यत् तस्य प्रगतिः समीचीना अस्ति ।



आकृतिः 15.1

दण्डालेखेषु द्वितीयः दण्डः अपि भवितुम् अर्हति । यथा 15.2 आकृतौ । एषः आलेखः कयोश्चित् उभयोः

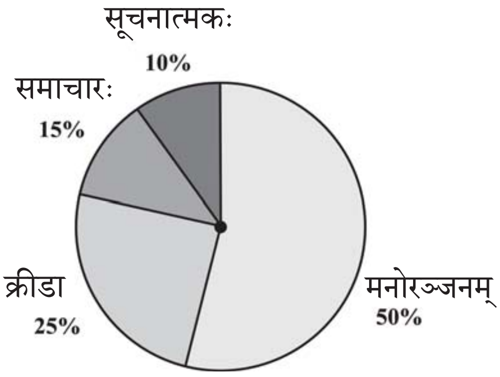
दिनयोः विभिन्न-प्रकारकानां फलानां विक्रयणस्य (रु. इत्यस्मिन्) तुलनात्मकं विवरणम् अस्ति। 15.2 आकृतौ अथ 15.1 आकृतौ भेदः कः ? स्वकीय मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।



आकृतिः 15.2

15.1.2 वृत्त-चित्रम् (वृत्त-आलेखः अथवा पाई-ग्राफ-चित्रम्)

एकस्य वृत्त-आलेखस्य प्रयोगः कस्य अपि एकसम्पूर्णस्य विभिन्न-भागानां तोलनार्थं भवति। वृत्तः एकं सम्पूर्णं प्रदर्शयति। 15.3 आकृतौ एकः वृत्त-आलेखः अस्ति। एतत् दूरदर्शनस्य विभिन्न-सारणीनां दर्शकानां प्रतिशततां दर्शयति।



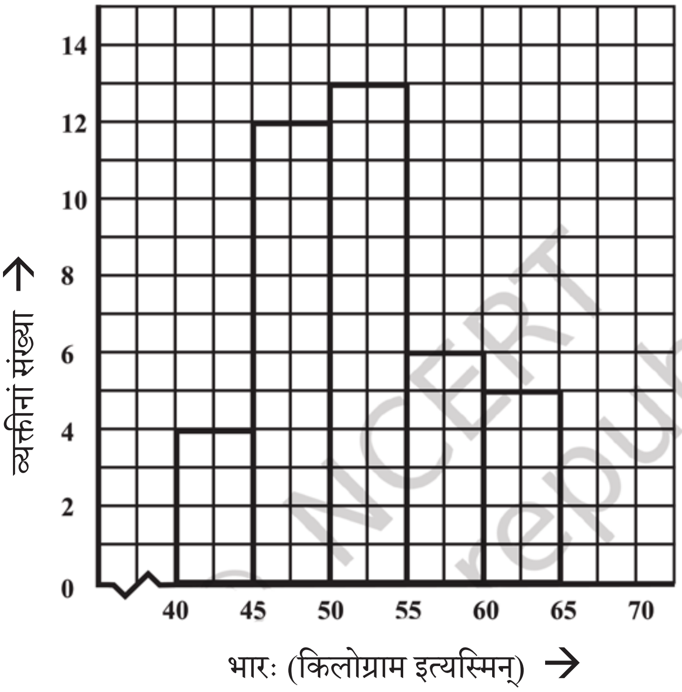
आकृतिः 15.3

15.1.3 आयत-चित्रम्

एकम् आयत-चित्रम् एकः दण्डालेखः इव भवति यः गणनाम् अन्तराले दर्शयति । अत्र अन्तरालाः संलग्न-दण्डद्वारा प्रदर्श्यते ।

15.4 आकृतौ आयत-चित्रम् एकस्य क्षेत्रस्य 40 व्यक्तीनां भाराणां (किलोग्राम इत्यस्मिन्) विभजनं दर्शयति ।

भारः (किलोग्राम इत्यस्मिन्)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65
व्यक्तीनां संख्या	4	12	13	6	5



15.4 आकृत्यां, वयं 0-40 पर्यन्तं विद्यमानाः सङ्ख्याः न दर्शयामः इति सूचयितुं काचित् दन्तुर-रेखा, तिर्यग्-रेखायाः अनुदिशि प्रयुक्ता अस्ति ।

ध्यानं ददतु दण्डानां मध्ये किमपि रिक्त-स्थानम् नास्ति यतो हि अन्तरालानां मध्ये अपि कश्चित् अवकाशः नास्ति । भवन्तः अस्मात् आयत-चित्रात् कां सूचनां प्राप्नुवन्ति ? तस्याः सूचनायाः एकां सूचीं निर्मापयन्तु ।

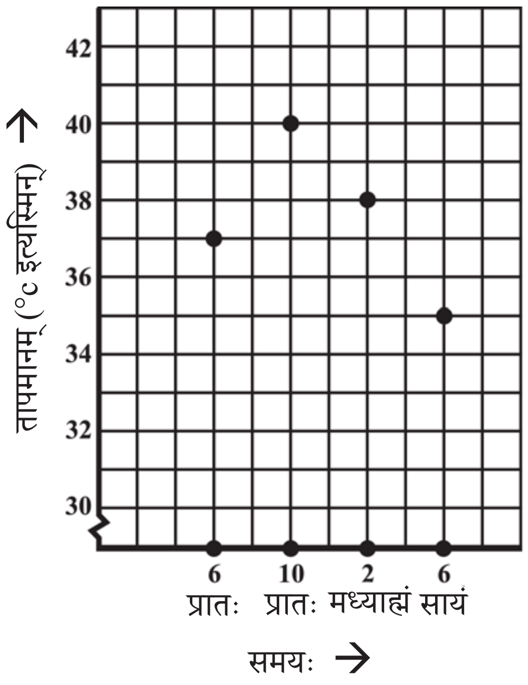
15.1.4 रेखा-आलेखः

एकः रेखा-आलेखः ईदृशीं गणनां प्रस्तौति या समयेन सह सततं परिवर्तमाना अस्ति । यदा रेणु रुग्णा जाता तदा तस्याः चिकित्सकः चतस्रः घण्टाः पश्चात् तस्याः शारीरिक-तापमानम् आकलितवान् । एतत् एकस्मिन् आलेखरूपे आसीत् (15.5 एवं 15.6 आकृतौ पश्यन्तु) ।

वयम् एतत् “ समय-तापमान-आलेखः” इति कथयितुं शक्नुमः ।

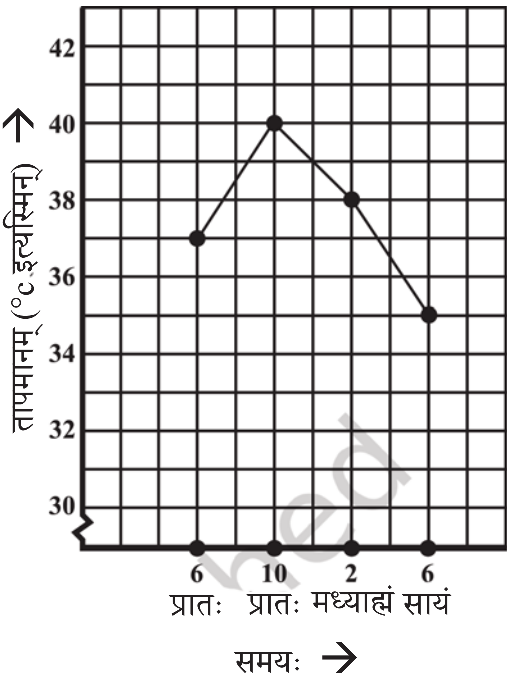
निम्नतालिकायां दत्त-गणनानां चित्ररूपे प्रदर्शनम् अस्ति ।

समयः	6 वादने प्रातः	10 वादने प्रातः	2 वादने मध्याह्ने	6 वादने सायंकाले
तापमानम् (°C इत्यस्मिन्)	37	40	38	35



आकृतिः 15.5

प्रत्येकं गणनां वर्गाङ्कित-कर्गदोपरि एकबिन्दुद्वारा अङ्कितम् अस्ति।



आकृतिः 15.6

पश्चात् बिन्दून् रेखाखण्डेन साकं मेलितवान्। परिणामतः एषः रेखा-आलेखः अस्ति।

तिर्यक्-रेखा (x- अक्ष नाम्ना अपि ज्ञायते) सा समयं दर्शयति यदा - यदा तापमानस्य ग्रहणं भवति। ऊर्ध्वाधर-रेखा (y- अक्ष नाम्ना अपि ज्ञायते) इत्यस्यां किं प्रदर्शितम् अस्ति ?

एषः आलेखः भवन्तं किं किं ज्ञापयति ? उदाहरणाय भवन्तः अस्मिन् तापमानस्य प्रारूपं द्रष्टुं शक्नुवन्ति। प्रातः 10 वादने अधिकम् आसीत् पुनः सायं 6 वादने न्यूनम् अभवत्। ध्यानं ददतु प्रातः 6 वादनस्य तथा प्रातः 10 वादनस्य च मध्ये तापमानं 3°c (40°c-37°c) वर्धितम्।

प्रातः 8 वादने तापमानं न पठितं तथापि आलेखं दृष्ट्वा प्रतीयते यत् एतत् 37°c इत्यस्मात् अधिकम् आसीत्। (कथम् ?)

उदाहरणम् 1 दत्त-आलेखः (आकृतिः 15.7) 2007 वर्षे A तथा B क्रीडकाभ्यां 10 क्रिकेट-क्रीडासु अर्जितान् धावनाङ्कान् प्रदर्शयति। आलेखस्य अध्ययनं कुर्वन्तु तथा निम्न-प्रश्नान् उत्तरन्तु।

(i) उभयोः अक्ष-रेखयोः का का सूचना प्रदत्ता अस्ति ?

(ii) का रेखा A क्रीडकेन अर्जितान् धावनाङ्कान् प्रदर्शयति।

(iii) 2007 तमे वर्षे किं कस्याम् अपि क्रीकेटक्रीडायाम् उभाभ्यां क्रीडकाभ्याम् अर्जिताः धावनाङ्काः समानाः आसन् ? यदि आम् तर्हि कस्यां क्रीकेट-क्रीडायाम् ?

(iv) उभयोः क्रीडकयोः कः स्थिरः अस्ति ? भवन्तः एतं निर्णयं प्रति कथं प्राप्तवन्तः ?

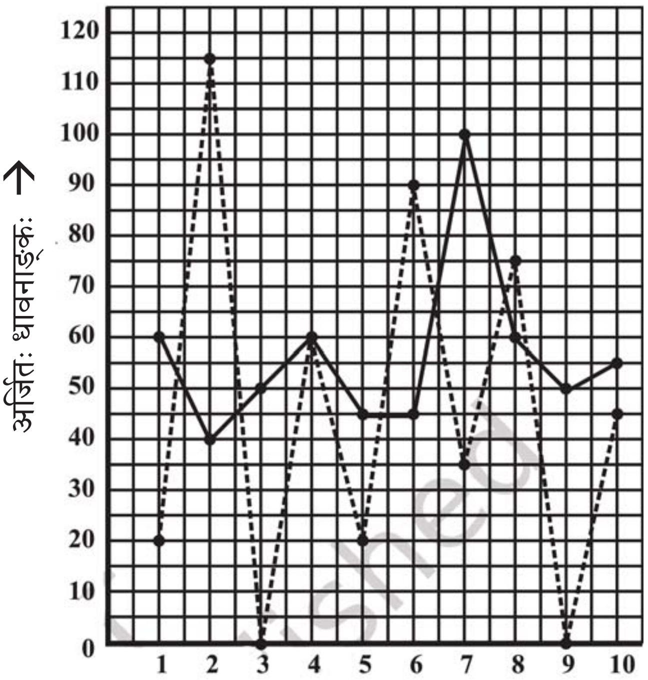
समाधानम्

(i) तिर्यक्-अक्षः (अथवा x- अक्षः) 2007 तमे वर्षे क्रीडमानानां क्रिकेट-क्रीडानां संख्यां प्रकटयति। ऊर्ध्वाधर-अक्षः (अथवा y- अक्षः) प्रत्येकं क्रिकेट-क्रीडायाम् अर्जितानां धावनाङ्कानां संख्यां प्रकटयति।

(ii) बिन्दुयुक्त-रेखा A क्रीडकेन अर्जितान् धावनाङ्कान् दर्शयति (यथा आलेखस्य उपरि सङ्केतः अपि अस्ति)।

(iii) चतुर्थ-क्रीकेटक्रीडाक्रमे उभौ अपि समानं 60 इति धावनाङ्कम् अर्जितवन्तौ ।(एतत् तेन बिन्दुना ज्ञायते यत्र उभे रेखे परस्परं प्रतिच्छेदयतः।)

(iv) क्रीडकः A इत्यस्य आलेखे एकः उच्च-शिखरः अस्ति तथा अनेकाः निम्न-उपत्यकाः । सः धावनाङ्क-प्राप्तौस्थिरः नास्ति। प्रत्युत अपर-पक्षे क्रीडकः B अपि कदापि 40 इत्यस्मात् न्यूनं धावनाङ्कं न प्राप्तवान् यद्यपि सः A इत्यस्य 115 धावनाङ्क-अपेक्षया अधिकतमं 100 इत्येव धावनाङ्कान् अर्जितवान् । A उभयोः क्रिकेट-क्रीडयोः शून्यं धावनाङ्कम् एव अर्जितवान् तथा आहत्य पञ्च-क्रिकेट-क्रीडासु 40 इत्यतः न्यूनम्। यतो हि A इत्यनेन अर्जितेषु धावनाङ्केषु अधिकतया उच्च-निम्न-पक्षाः सन्ति अतः B एव एकः विश्वसनीयः एवं स्थिरः क्रीडकः अस्ति।



क्रिकेट-क्रीडा →

आकृतिः 15.7

उदाहरणम् 2 एकं कारयानम् एकस्मात् P इति नगरात् Q प्रति गच्छति यः परस्परं 350 किलोमीटरपरिमितस्य दूरे स्थितः अस्ति। प्रदत्त-आलेखः (आकृतिः 15.8) विभिन्न-समये कारयानस्य P नगरात् दूरीं प्रदर्शयति। आलेखस्य अध्ययनं कृत्वा निम्न-प्रश्नान् उत्तरन्तु।

(i) उभयोः अक्षयोः किं - किं प्रदर्शितम् अस्ति ?

(ii) कारयानं कस्मिन् समये तथा कुतः यात्रां प्रारब्धवत् ?

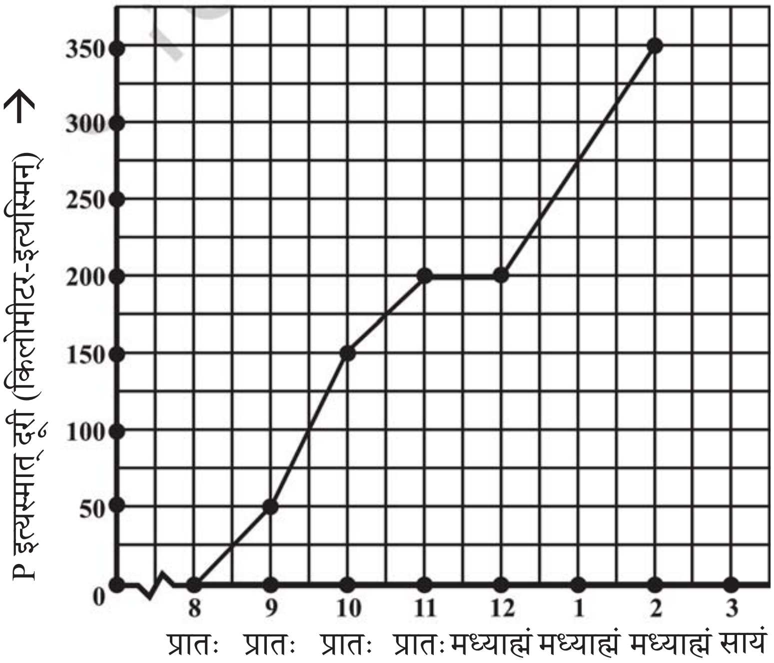
(iii) प्रथम-घण्टायां यानं कियत् दूरं गतवत् ?

(iv) द्वितीय-घण्टायां तृतीय-घण्टायाञ्च कारयानं कियत् पर्यन्तं दूरं गतवत् ?

(v) किं पूर्वं घण्टात्रयं कारयानस्य गतिः समाना आसीत् ? भवन्तः कथं ज्ञातवन्तः ?

(vi) किं कारयानं कदापि कस्य अपि स्थाने अस्थगयत् ?

(vii) कारयानं Q नगरे कस्मिन् समये प्राप्तवत् ?



समयः →

आकृतिः 15.8

समाधानम्

(i) तिर्यक् (x) इति अक्षः समयं दर्शयति । ऊर्ध्वाधरः (y) इति अक्षः P नगरात् कारयानस्य दूरीं दर्शयति।

(ii) कारयानं 8 वादने प्रातः P नगरात् अचलत्।

(iii) कारयानं प्रथम-घण्टायां 50 km इति दूरम् आप्नोत्। (भवन्तः एवं द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् कारयानं प्रातः 8 वादने P नगरात् अचलत् तथा प्रातः 9 वादने आलेखानुसारं 50 km इति दूरम् आसीत्। अतः प्रातः 8 तथा 9 वादनमध्ये एकघण्टायां कारयानं 50 km दूरम् अगच्छत्।)

(iv) (a) कारयानं द्वितीय-घण्टायां (प्रातः 9 वादनात् 10 वादने) 100 km इति (150 - 50) प्राप्तवत्। (b) कारयानं तृतीय-घण्टायां (प्रातः 10 वादनात् 11 वादने) 50 km इति (200 - 150) प्राप्तवत्।

(v) (iii) तथा (iv) प्रश्नस्य उत्तरात् एवं जानीमः यत् कारयानस्य गतिः सदैव समाना न आसीत्। (आलेखः एतत् अपि प्रदर्शयति यत् गतिः कथं परिवर्तमाना अभवत्।)

(iv) आलेखे वयं पश्यामः यत् कारयानं प्रातः 11 वादने तथा 12 वादने अपि P नगरात् 200 km इति दूरे आसीत्। अनेन अवगम्यते यत् कार्यानं अस्मिन् समयान्तराले न यातम् इति। अस्मिन् अन्तराले प्राप्त-दूरी एकः क्षैतिज-रेखाखण्डः अस्ति यः अस्य तथ्यस्य पुष्टिं करोति।

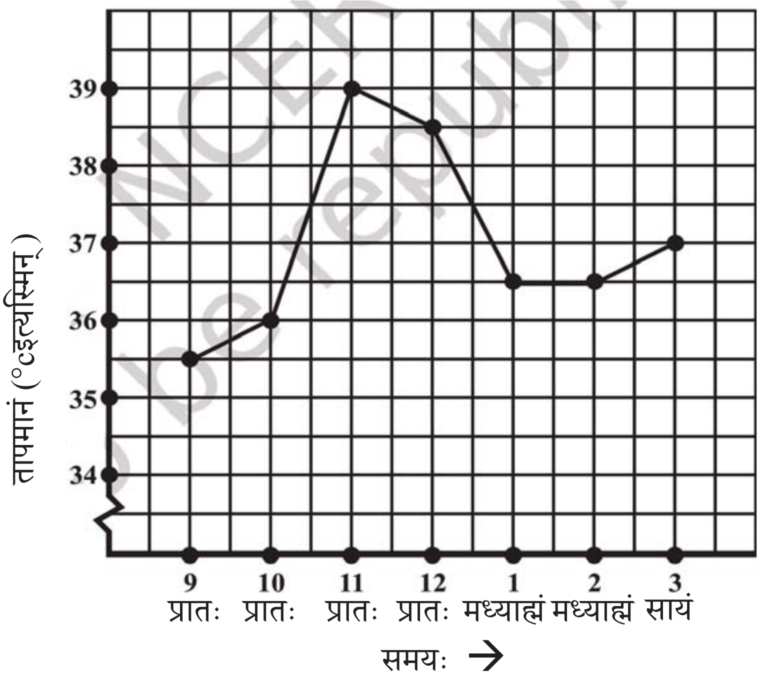
(vii) 2 वादने मध्याह्ने कारयानं Q इति नगरं प्राप्तवत्।

प्रश्नावली 15.1

1. निम्न-आलेखः कस्मिंश्चित् चिकित्सालये एकस्य रुग्णस्य प्रति घण्टायां गृहीतं तापमानं दर्शयति।

(a) रुग्णस्य तापमानं मध्याह्ने 1 वादने किम् आसीत्?

(b) रुग्णस्य तापमानं 38.5°c कदा आसीत्?



(c) अस्मिन् सम्पूर्णे अन्तराले रुग्णस्य तापमानम् आहत्य द्विवारम् एकसमानम् एव आसीत्। एतौ द्वौ समयौ कौ स्तः?

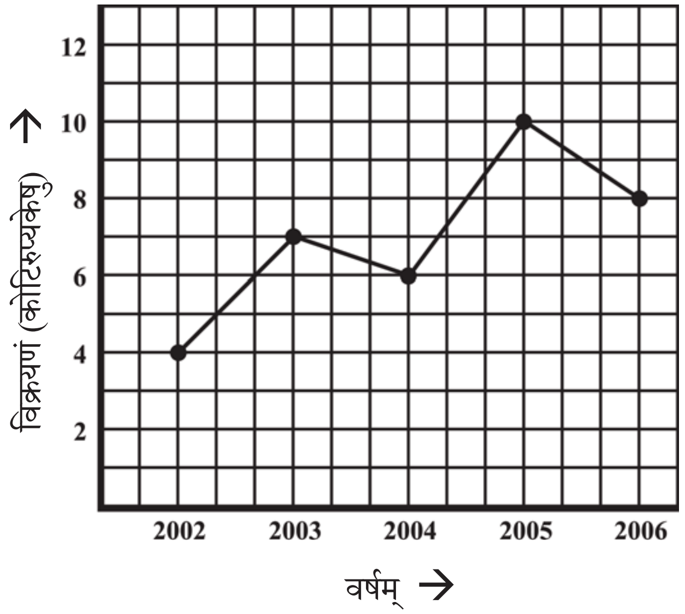
(d) मध्याह्ने 1.30 वादने रुग्णस्य तापमानं किम् आसीत्? एतं निष्कर्षं प्रति भवन्तः कथं प्राप्तवन्तः?

(e) कस्मिन् अन्तराले रुग्णस्य तापमानं 'वर्धनस्य आकर्षणं' दर्शयति।

2. एकः निर्माता उद्योगगृहस्य विभिन्न-वर्षेषु कृतविक्रयणं निम्न-आलेखेन प्रदर्शितम् अस्ति।

(a) (i) 2002 वर्षे (ii) 2006 वर्षे कियत् विक्रयणं जातम्?

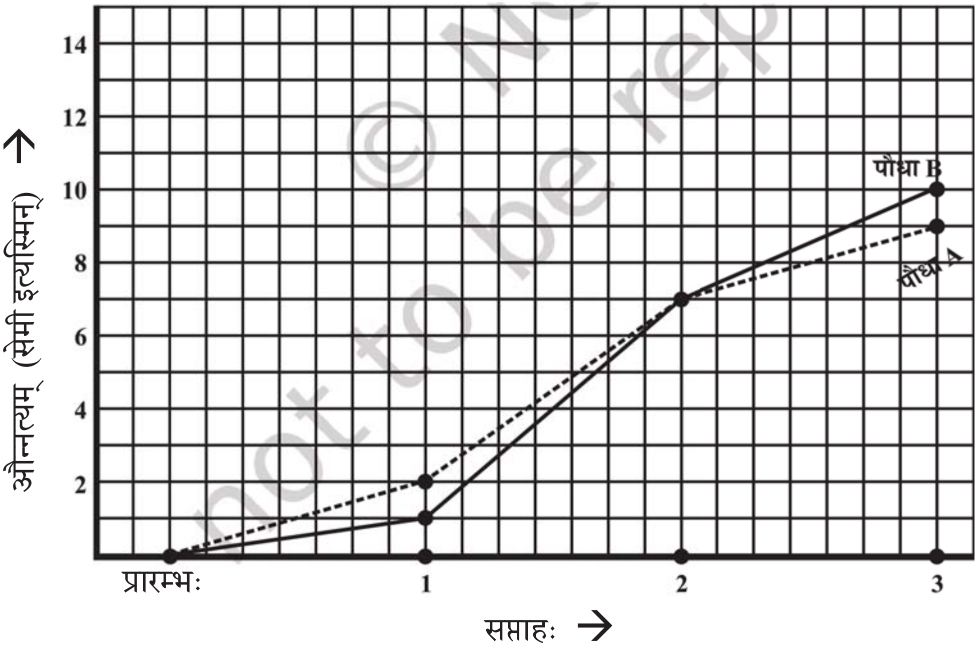
(b) (i) 2003 वर्षे (ii) 2005 वर्षे कियत् विक्रयणं जातम्?



(c) 2002 वर्षे तथा 2006 वर्षस्य विक्रयणे कियान् भेदः आसीत् ?

(d) कस्मिन् अन्तराले विक्रयणस्य भेदः पूर्ववर्षस्य अपेक्षया सर्वाधिकः आसीत् ?

3. वनस्पति-विज्ञानस्य एकस्मिन् प्रयोगे समान-प्रयोगशाला-परिस्थितिषु पादपद्वयं A तथा B प्ररोपितं । सप्ताहत्रयं यावत् तस्य औन्नत्यं प्रत्येकं सप्ताहस्य अन्ते मापितम् । परिणामः निम्न-आलेखे प्रदर्शितः अस्ति ।



(a) (i) 2 सप्ताहं पश्चात् (ii) 3 सप्ताहं पश्चात् A इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् आसीत् ?

(b) (i) 2 सप्ताहं पश्चात् (ii) 3 सप्ताहं पश्चात् B इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् आसीत् ?

(c) तृतीये सप्ताहेA इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् वर्धितम् ?

(d) द्वितीयसप्ताहस्य अन्तात् तृतीयसप्ताहस्य अन्त-पर्यन्तं B इति पादपस्य औन्नत्यं कियत् वर्धितम् ?

(e) कस्मिन् सप्ताहे A इति पादपस्य औन्नत्यं सर्वाधिकं वर्धितम् ?

(f) कस्मिन् सप्ताहे B इति पादपस्य औन्नत्यं न्यूनं वर्धितम् ?

(g) किं कस्मिन् अपि सप्ताहे उभयोः पादपयोः औन्नत्यं समानम् आसीत् ? परिचिन्वन्तु ।

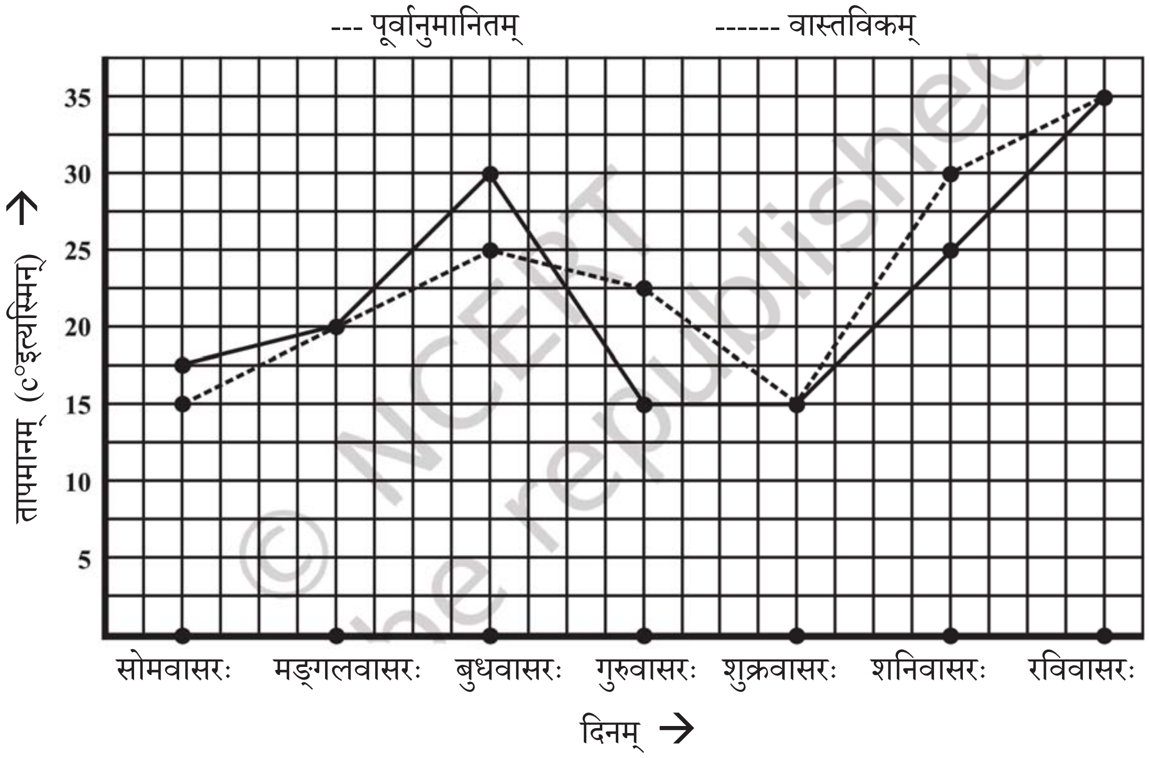
4. निम्न-आलेखः कस्य अपि सप्ताहस्य प्रत्येकं दिनस्य कृते पूर्वानुमानित-तापमानं तथा वास्तविकं तापमानं दर्शयति ।

(a) कस्मिन् दिने पूर्वानुमानित-तापमानं तथा वास्तविकं तापमानं समानम् आसीत् ?

(b) सप्ताहे पूर्वानुमानितम् अधिकतमं तापमानम् किम् आसीत् ?

(c) सप्ताहे वास्तविकं न्यूनतमं तापमानं किम् आसीत् ?

(d) कस्मिन् दिने वास्तविक-तापमाने तथा पूर्वानुमानित- तापमाने भेदः सर्वाधिकः आसीत् ?



5. निम्न-तालिकायाः प्रयोगं कृत्वा एकं रैखिक-आलेखं निर्मापयन्तु -

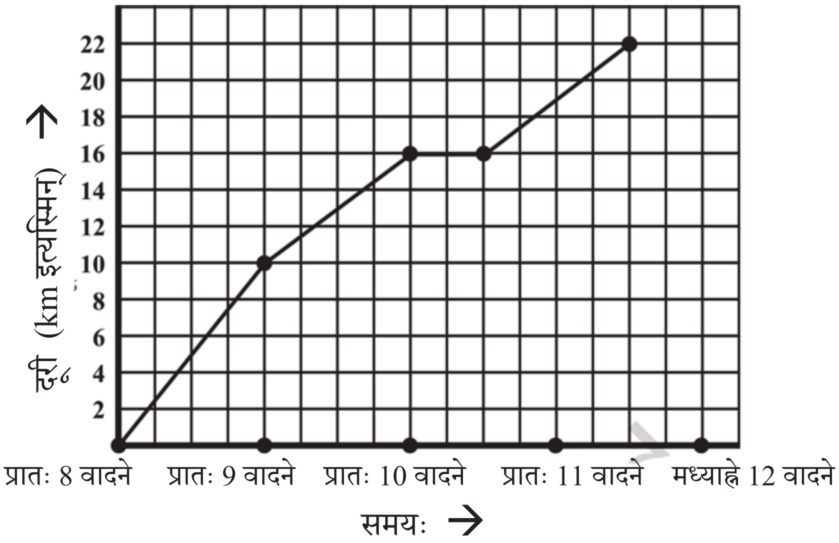
(a) विभिन्न-वर्षेषु कस्मिन् अपि पर्वतीय-नगरे हिमपातस्य दिनानां संख्याः

वर्षम्	2003	2004	2005	2006
दिनम्	8	10	5	12

(b) विभिन्न-वर्षेषु एकस्मिन् ग्रामे पुरुषाणां स्त्रीणां संख्या (सहस्रेषु)

वर्षम्	2003	2004	2005	2006	2007
पुरुषाणां संख्या	12	12.5	13	13.2	13.5
स्त्रीणां संख्या	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. एकः पत्रवाहकः कस्यचित् नगरस्य पार्श्व-स्थित-स्थित-उपनगरे एकस्मै व्यापारिणे सामग्रीं दातुं द्विचक्रिका-वाहनेन (साईकिल-यानम्) गच्छति । विभिन्नेषु समयेषु नगरात् तस्य दूरी निम्न-आलेखे प्रदर्शिता कृतः ।



(a) x-अक्षे समयं दर्शयितुं कस्य मानदण्डस्य प्रयोगः अस्ति ?

(b) सः सम्पूर्णां यात्रां पूरयितुं कियन्तं समयं स्वीकृतवान् ?

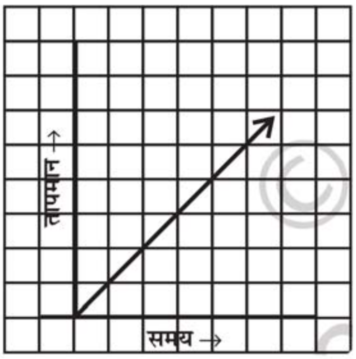
(c) व्यापारिणः स्थलस्य दूरी नगरात् कियत् वर्तते ?

(d) किं पत्रवाहकः मार्गे कुत्रापि स्थगितवान् ? विवरणं ददतु ।

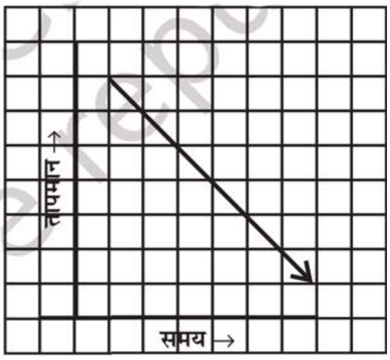
(e) कस्मिन् अन्तराले तस्य गतिः अधिका अस्ति ?

7. निम्न-आलेखेषु के-के आलेखाः समय-तापमानयोः मध्ये सम्भवाः सन्ति ? तर्केण सह स्वकीयम् उत्तरं ददतु ।

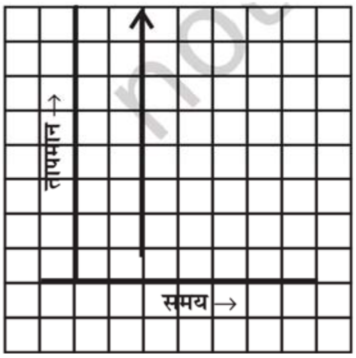
(i)



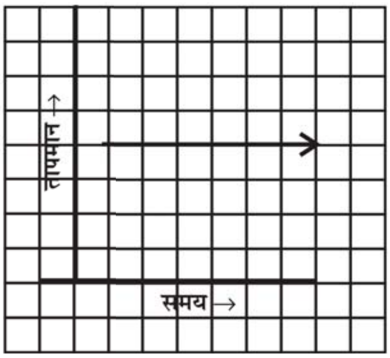
(ii)



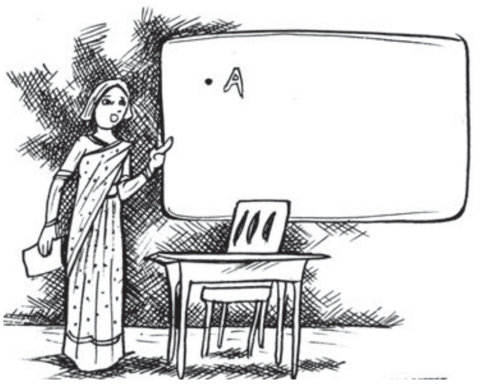
(iii)



(iv)



15.2 रैखिक - आलेखः



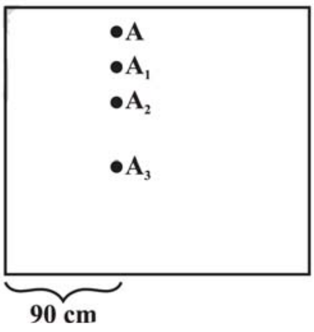
रेखा-आलेखः अनेक-रेखाखण्डान् परस्परं संयोज्य निर्मीयते । कदाचित् एषः आलेखः एका सम्पूर्णा अखण्डित-रेखा अपि भवितुम् अर्हति । एतादृशः आलेखः रैखिक-आलेखः इति । एतादृशम् आलेखं निर्मातुं वयं वर्गाङ्कित-कागदे कांश्चन बिन्दून् अङ्कयामः । साम्प्रतं वयं शिक्षयिष्यामः यत् वर्गाङ्कित-कागदे बिन्दुः सरलतया कथं अङ्कितः भवति ।

15.2.1 बिन्दोः स्थितिः

अध्यापिका श्यामफलके एकं बिन्दुम् अङ्कितवती पुनः सा स्व छात्रेभ्यः पृष्टवती यत् ते तस्य श्याम-फलके स्थितिं कथं अङ्कयिष्यन्ति ? एतस्मै प्रश्नाय अनेकानि उत्तराणि आगतानि (आकृतिः 15.9) ।

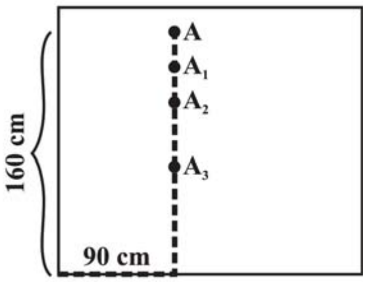
आकृतिः 15.9

किम् एतेषु कमपि कथनं बिन्दोः स्थितिं संयक् निश्चिनोति ? न कमपि न । किमर्थम् ? अस्मिन् विषये विचिन्तयन्तु । तदा जॉनः एकं परामर्शं दत्तवान् । सः बिन्दोः दूरीं श्यामफलकस्य वामभागात् परिमाप्य कथितवान् “एषः बिन्दुः श्यामफलकस्य वामभागात् 90 सेण्टीमीटरपरिमिते दूरे अस्ति । ” किं भवन्तः अवगच्छन्ति यत् तस्य परामर्शः समीचीनः अस्ति ? (आकृतिः 15.10)



आकृतिः 15.10

A, A_1, A_2, A_3 सर्वे बिन्दवः वामभागात् 90 सेमी दूरे अस्ति ।



आकृतिः 15.11

बिन्दुः A वामभागात् 90 सेमी तथा निम्नभागात् 160 सेमी दूरे अस्ति ।

तदा रेखा कथनं संशोध्य उक्तवती "एषः बिन्दुः श्यामफलकस्य वामभागात् 90 सेमी तथा निम्नभागात् 160 सेमी इत्यस्मिन् स्थितः अस्ति।" एवं समस्यायाः सम्यक् समाधानं अभवत्। (आकतिः 15.11)। तदा अध्यापकः ज्ञापितवान् "वयं बिन्दोः स्थितिं एवं (90, 160) लिखित्वा प्रकटयामः।" किं बिन्दुः (160, 90) बिन्दुः (90, 160) इत्यस्मात् विभिन्नः भविष्यति ? अस्मिन् विषये चिन्तयन्तु।

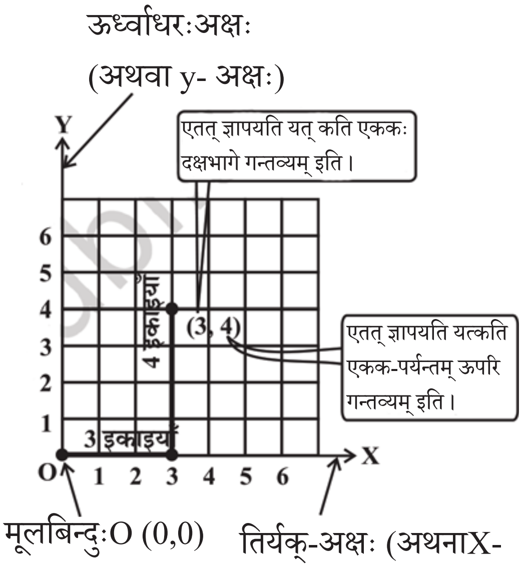
एवं कथ्यते यत् सप्तदश-शताब्द्यां गणितज्ञः रेने दकार्तः एकां पिपिलिकां छदेः कोणस्य पार्श्वे चलन्तीं दृष्टवान् तथा तले एकस्य बिन्दोः स्थितेः निर्धारणविषये चिन्चयितुम् आरब्धवान्। तिर्यक् ऊर्ध्वाधरश्च एताभ्यां रेखाभ्यां प्रदत्त-बिन्दोः दूरीद्वयं परिमाप्य स्थितेः प्रकटीकरणस्य विधिः तस्य सम्माने अद्य 'कार्तीय-विधिः' नाम्ना संज्ञायते।

15.2.2 निर्देशाङ्कः

कल्पनां कुर्वन्तु यत् भवन्तः कस्मिंश्चित् चलचित्रमन्दिरे गच्छन्ति तथा स्वकीयम् आरक्षितम् आसन्दम् अन्वेषयन्ति। अस्य कृते द्वे संख्ये भवितव्ये पङ्क्ति-संख्या तथा आसन्द-संख्या। कस्मिन् अपि तले बिन्दोः स्थितिं निर्धारितुम् अयम् एव आधारः अस्ति।

15.12 आकृतौ ध्यानं ददतु यत् बिन्दुः (3, 4) यस्य दूरी वामभागात् 3 एककः तथा निम्नप्रान्तभागात् 4 एककः अस्ति, वर्गाङ्किते कागदे केन प्रकारेण अङ्कितः अस्ति इति।

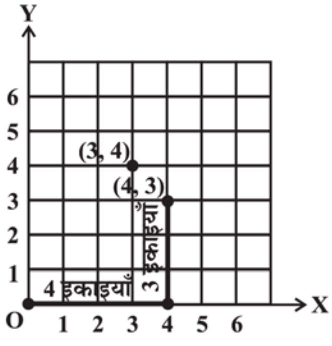
आलेखीय-कागदम् अपि एकं वर्गाङ्कितं कागदम् एव अस्ति। अस्मिन् x- अक्षं तथा y-अक्षं सौविध्यानुसारं दर्शयामः तथा पुनः तस्मिन् बिन्दोः स्थितिं निर्धारयामः। 3 संख्या बिन्दोः x-निर्देशाङ्कः तथा 4 सङ्ख्या y-निर्देशाङ्कः उच्यते। एवं रीत्या वयं कथयामः यत् (3, 4) बिन्दोः निर्देशाङ्कौ स्तः।



आकृतिः 15.12

उदाहरणम् 3 एकस्मिन् आलेखे इति बिन्दुः इति अङ्कयन्तु। किम् एषः सः एव बिन्दुः वर्तते यः (3, 4) प्रदर्शयति ?

समाधानम् - वर्गाङ्कित-कागदे अस्मिन् x- अक्षं तथा y-अक्षं निर्धारयन्तु। (वास्तविकतया एताः संख्या-रेखाः एव सन्ति।) मूलबिन्दुः (0, 0) इत्यतः प्रारभ्यताम्। 4 एककः दक्षपक्षतः चलित्वा पुनः 3 एककः उपरि गच्छन्ति। चेत् भवन्तः (3, 4) बिन्दुं प्राप्नुवन्ति। 15.13 इति आकृतिं दृष्ट्वा भवन्तः बोधयितुं शक्नुवन्ति यत् (4, 3) बिन्दुः तथा (3, 4) इति बिन्दुः पृथक् - पृथक् अस्ति।



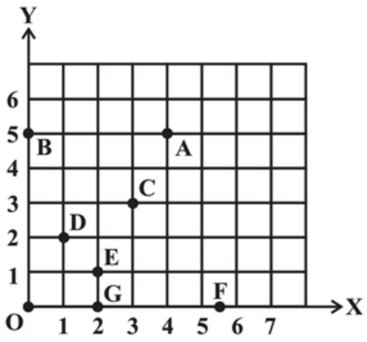
आकृतिः 15.13

उदाहरणम् 4 - 15.14 आकृतिं दृष्ट्वा निम्न-बिन्दूनां स्थितये उपयुक्तम् अक्षरं चिन्वन्तु।

(i) (2, 1) (ii) (0, 5) (iii) (2, 0)

तथा लिखन्तु -

(iv) A बिन्दोः निर्देशाङ्कः (v) F बिन्दोः निर्देशाङ्कः



आकृतिः 15.14

समाधानम् -

(i) (2, 1) अस्ति E बिन्दुः (D इति न विचिन्तयन्तु)।

(ii) (0, 5) अस्ति B बिन्दुः (कथम् ? इति मित्रैः सह चर्चयन्तु)।

(iii) (2 , 0) अस्ति G बिन्दुः।

(iv) बिन्दुः A इत्यस्य निर्देशाङ्कौ स्तः (4, 5)।

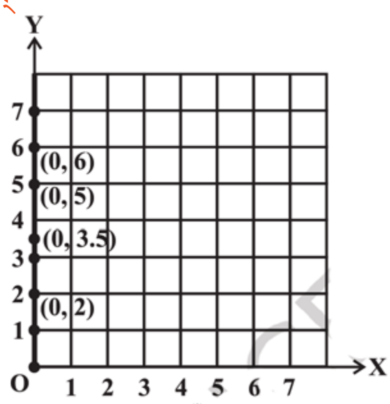
(v) बिन्दुः F इत्यस्य निर्देशाङ्कौ स्तः (5.5, 0)।

उदाहरणम् 5 निम्न-बिन्दून् वर्गाङ्कित-कागदे अङ्कयन्तु तथा पश्यन्तु यत् किं ते सर्वे एकस्याम् एव सरल-रेखायां सन्ति यदि सन्ति तर्हि तस्याः रेखायाः नाम वदन्तु।

(i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5) (ii) A (1, 1), B(1, 2), C(1, 3), D(1, 4)

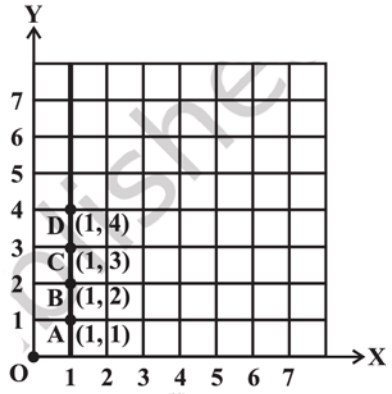
(iii) K (1, 3), L(2, 3), M(3, 3), N(4, 3) (iv) W (2, 6), X(3, 5), Y(5, 3), Z(6, 2)

समाधानम् -



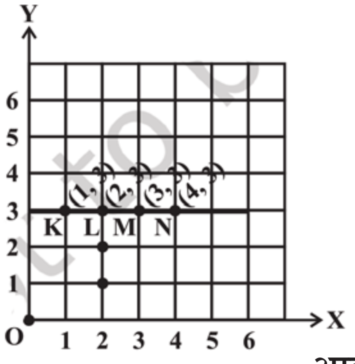
(i)

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति।
सा अस्ति - y-अक्षः



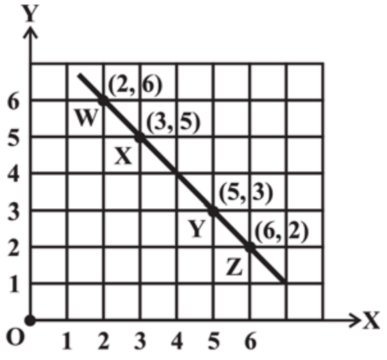
(ii)

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। एषा AD रेखा अस्ति (भवन्तः एतस्याः किञ्चित् भिन्नं नाम अपि दातुं शक्नोति।) y-अक्षस्य समान्तरीया वर्तते।



(iii)

आकृतिः 15.15



(iv)

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। वयम् एतां KL अथवा KM अथवा MN आदि नाम दातुं शक्नुमः। एषा x- अक्षस्य समान्तरीया वर्तते।

अत्र सर्वे बिन्दवः एकस्याम् एव रेखायां सन्ति। वयम् एतां XY अथवा WY अथवा YZ इति नाम दातुं शक्नुमः।

ध्यानं ददतु यत् उपरि प्रदत्ते प्रत्येकम् उदाहरणे अङ्कितबिन्दूनां मेलने सति प्राप्त-आलेखः एका सरल-रेखा अस्ति। एतादृशाः आलेखाः रैखिक-आलेखाः इति उच्यन्ते।

प्रश्नावली 15.2

1. निम्न-बिन्दून् एकस्मिन् वर्गाङ्कित-कागदे अङ्कयन्तु तथा परीक्षन्तु यत् किं ते सर्वे एकस्यां सरल-रेखायां स्थिताः सन्ति ?

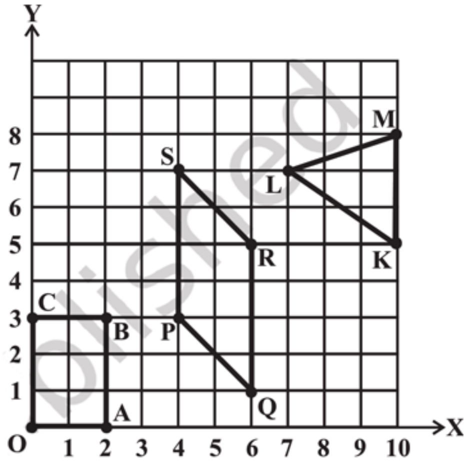
   (a) A (4, 0), B (4, 2), C(4, 6), D (4, 2.5)

   (b) P (1, 1), Q (2, 2), R(3, 3), S (4, 4)

   (c) K (2, 3), L (5, 3), M(5, 5), N (2, 5)

2. (2, 3) तथा (3, 2) एकां सरलां रेखां रचयन्तु। तेषां बिन्दूनाम् एकं निर्देशाङ्कं लिखन्तु यस्मिन् एषा रेखा x-अक्षम्, y-अक्षं च मिलति।

3. आलेखे निर्मितासु आकृतिषु प्रत्येकं शीर्षस्य निर्देशाङ्कं लिखन्तु।



4. निम्नलिखित-कथनेषु किं सत्यं किम् असत्यं ? असत्यं समीचीनं कुर्वन्तु ?

   (i) कश्चित् बिन्दुः यस्य x- निर्देशाङ्कः शून्यः अस्ति तथा y- निर्देशाङ्कः शून्येतरः। सः y- अक्षे स्थितः भवति।

   (ii) कश्चित् बिन्दुः यस्य y- निर्देशाङ्कः शून्यः अस्ति तथा x- निर्देशाङ्कः 5। सः y- अक्षे स्थितः भविष्यति।

   (iii) मूल बिन्दोः निर्देशाङ्कौ (0, 0) स्तः।

15.3 कश्चित् अनुप्रयोगः

दैनिक-जीवने भवन्तः दृष्टवन्तः यत् कस्याः अपि सुविधायाः यावत् अधिकम् उपयोगं भवन्तः कुर्वन्ति तावत् अधिकं तस्य कृते मूल्यम् अपि दातुं भवति। यदि भवन्तः विद्युतः उपयोगम् अधिकं कुर्वन्ति तदा भवता अधिकः धनराशिः देयः भवति यदि भवन्तः विद्युतः उपयोगं न्यूनं कुर्वन्ति तदा देयः धनराशिः अपि न्यूनः भवति। एतत् एकम् उदाहरणम् अस्ति यत्र एकः राशिः अपरं प्रभावयति। विद्युतः देयधनराशिः उपभुक्त-विद्युतः मात्रायाम् आश्रितः भवति। वयं कथयामः यत् विद्युतः मात्रा मुक्तः अथवा स्वतन्त्र-चरः अस्ति प्रत्युत विद्युतः देयः धनराशिः एकः आश्रितः चरः अस्ति। एतादृशानां राशीनां सम्बन्धं वयम् आलेखद्वारा अपि प्रदर्शयितुं।

विचारयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अथ लिखन्तु

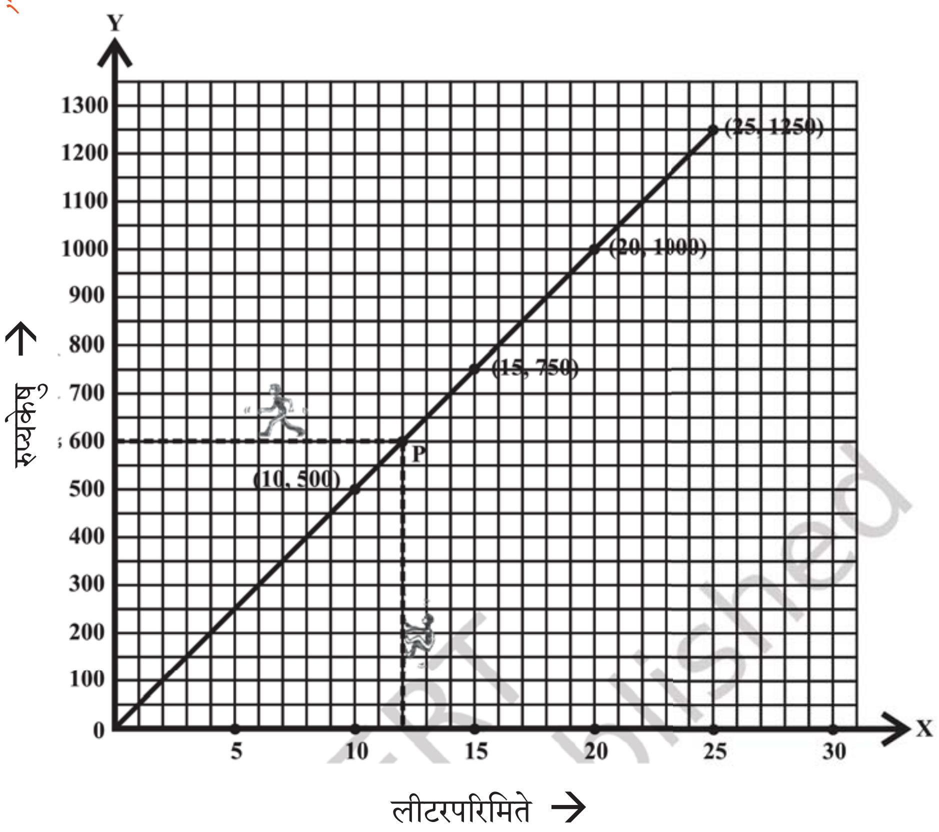
एकस्य कारयानस्य भू-तैल (पेट्रोल) कोषं पूरणार्थं दत्तराशिः क्रीतभूतैलस्य मात्रया (लीटर-परिमिते) निश्चितः भवति। अत्र कः चरः स्वतन्त्र-चरः अस्ति ? चर्चयन्तु।

उदाहरणम् 6 (मात्रा तथा मूल्यम्) निम्न-तालिका भू-तैलस्य मात्रां तथा तस्य मूल्यं ज्ञापयति।

भू-तैलस्य मात्रा (लीटर-परिमिते)	10	15	20	25
भू-तैलस्य मूल्यं (रुप्यकेषु)	500	750	1000	1250

एताः गणनाः प्रदर्शयितुम् आलेखनिर्माणं कुर्वन्तु -

समाधानम्



आकृतिः 15.16

(i) आगच्छन्तु उभयोः पक्षयोः कृते (आकृतिः 15.16) उपयुक्तं मानदण्डं चिन्वन्तु।

(ii) तिर्यक्-अक्षे भू-तैलस्य मात्रां प्रदर्शयामः।

(iii) ऊर्ध्वाधर-अक्षे मूल्यं प्रदर्शयामः।

(iv) (10,500), (15,750), (20,1000) तथा (25,1250) बिन्दून् अङ्कयन्तु।

(v) बिन्दून् मेलयन्तु।

वयं पश्यामः यत् आलेखः एका सरला रेखा अस्ति। (एषः एकः रैखिक-आलेखः अस्ति) एषः आलेखः मूलबिन्दूतः कथं गच्छति ? एतस्मिन् विषये चिन्तयन्तु।

एषः आलेखः अस्माकं कृते केषाञ्चन तथ्यानां विषये अनुमानं कर्तुं सहायकः भवितुम् अर्हति। स्वकुर्वन्तु यत्स्वीकुर्वन्तु यत् वयं ज्ञातुम् इच्छामः यत् 12 लीटर-परिमितं भूतैलस्य कृते कियत् मूल्यं देयं भविष्यति ?

तिर्यक्-अक्षे 12 इत्यस्य स्थितिं पश्यन्तु। 12 इत्यस्य चिह्ने ऊर्ध्वाधर-रेखायाः अनुकूलं गत्वा तम् आलेखं P बिन्दौ मेलयामः।

P बिन्दुतः तिर्यक्-रेखायाः अनुकूलं गत्वा ऊर्ध्वाधर-अक्षं प्राप्नुमः यत्र वयं तं बिन्दुं प्राप्नुमः। यः 600 रुप्यकं प्रदर्शयति।

एषः आलेखः एतादृशेः स्थितेः अस्ति यस्मिन् उभौ राशी समानुपाते स्तः। कथम् ? एतादृश्यां स्थित्यां आलेखः सर्वदा रैखिकः एव भवति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

उपर्युक्त-उदाहरणे , आलेखात् जानन्तु यत् 800 रुप्यकेषु कियत् मात्रं भू-तैलं क्रेतुं शक्नुमः ?

उदाहरणम् 7 (मूलधनं सामान्यकुसीदश्च)

एकः वित्तकोषः वरिष्ठ - नागरिकेभ्यः तेषां सञ्चित-धने 10% साधारणं वृद्धिं ददाति। सञ्चितं धनं तथा तस्मिन् अर्जित-वार्षिक-साधारण-वृद्धेः सम्बन्धं दर्शयितुम् एकम् आलेखं रचयन्तु। अस्मात् आलेखात् निम्नं जानन्तु।

(a) 250 रुप्यकं सञ्चिते सति तस्मिन् लब्धः वृद्धिः।

(b) 70 रुप्यकं वृद्धिं प्राप्तुं कियत् धनं सञ्चितं करणीयम्।

सञ्चित-धनम्	1 वर्षीय साधारण-वृद्धिः
100 रुप्यकम्	$\frac{100\times1\times10}{100}$ =10 रुप्यकम्
200 रुप्यकम्	$\frac{200\times1\times10}{100}$ =20 रुप्यकम्
300 रुप्यकम्	$\frac{300\times1\times10}{100}$ =30 रुप्यकम्
500 रुप्यकम्	$\frac{500\times1\times10}{100}$ =50 रुप्यकम्
1000 रुप्यकम्	100 रुप्यकम्

उपयुक्त-चरणम्

1. सञ्चित-धनं तथा तस्मात् अर्जितं कुसीदं जानन्तु। यौ अङ्कनीयौ स्तः।
2. x- अक्षः तथा y-अक्षः इत्यनयोः प्रदर्शितमानं राशिं निर्धारयन्तु।
3. उपयुक्तं मानदण्डं चिन्वन्तु।
4. बिन्दुम् अङ्कयन्तु।
5. बिन्दून् मेलयन्तु।

एतेभ्यः राशिभ्यः निम्न-तालिकां प्राप्नुमः -

सञ्चित-धनम् (रुप्यकेषु)	100	200	300	500	1000
वार्षिक-साधारण-वृद्धिः (रुप्यकेषु)	10	20	30	50	100

(i) मानदण्डः - तिर्यक्-अक्षे 1 एककः = 100 रुप्यकम्
तिर्यक्-अक्षे 1 एककः = 10 रुप्यकम्

(ii) सञ्चित-धनं तिर्यक्-अक्षे प्रदर्शयामः।

(iii) साधारण-वृद्धिम् ऊर्ध्वाधर-अक्षे दर्शयामः।

(iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50), तथा (1000, 100) बिन्दून् अङ्कयन्तु।

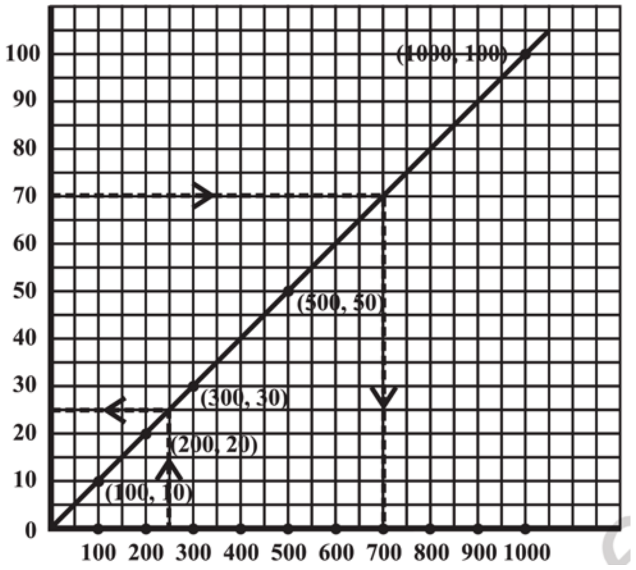
(v) बिन्दून् मेलयन्तु। वयम् आलेखे एकां सरलां रेखां प्राप्नुमः - (आकृतिः 15.17)।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

किम् उदाहरण-संख्या 7 एकस्य समानुपातस्य उदाहरणम् अस्ति ?

(a) तिर्यक्-अक्षे 250 रुप्यकात्मक-मूलधनाय ऊर्ध्वाधर-अक्षे 25 रुप्यकस्य सामान्यः वृद्धिः अस्ति।

(b) ऊर्ध्वाधर-अक्षे 70 रुप्यकस्य कुसीदाय तिर्यक्-अक्षे 700 रुप्यकात्मकं मूलधनम् अस्ति।



आकृतिः 15.17

उदाहरणम् 8 (समयः दूरी च) अजितः निरन्तरं 30 किलोमीटरपरिमितं प्रति घण्टां स्कूटरयानं चालयति। एतस्यै स्थित्यै दूरी-समययोः मध्ये एकम् आलेखं रचयन्तु। अनेन आलेखेन जानन्तु।

(i) अजीताय 75 किलोमीटरपर्यन्तं दूरं गमनाय योज्यमानः समयः।

(ii) अजीतेन $3\frac{1}{2}$ घण्टात्मके समये प्राप्ता दूरी।

समाधानम्

यात्रायाः घण्टाः	प्राप्ता दूरी
1 घण्टा	30 किमी
2 घण्टे	$2 \times 30 = 60$किमी
3 घण्टाः	$3 \times 30 = 90$किमी
4 घण्टाः	$4 \times 30 = 120$किमी

एतैः राशिभिः निम्न-तालिका प्राप्यते -

समयः (घण्टासु)	1	2	3	4
प्राप्ता दूरी (किलोमीटर-परिमिते)	30	60	90	120

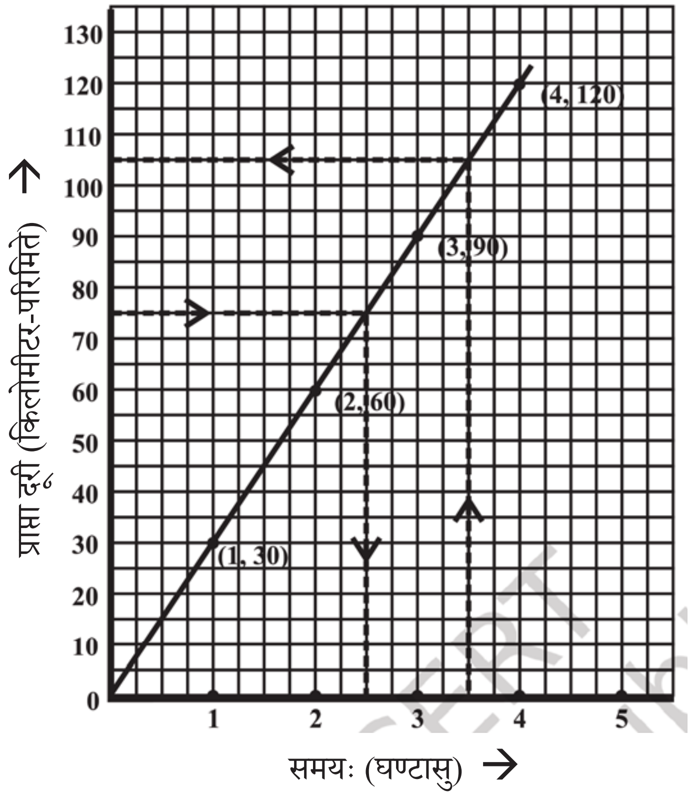
(i) मानदण्डः - तिर्यक्-अक्षः 2 एककः = 1 घण्टा (आकृतिः 15.18)
तिर्यक्-अक्षः 1 एककः = 10 किलोमीटर-परिमितम्

(ii) तिर्यक्-अक्षे समयं प्रदर्शयामः।

(iii) ऊर्ध्वाधर-अक्षे दूरीं दर्शयामः।

(iv) (1, 30) (2, 60) (3, 90) तथा (4,120) बिन्दून् अङ्कयन्तु।

(v) बिन्दून् मेलयन्तु। वयम् एकां रैखिक-आलेखं प्राप्नुमः - (आकृतिः 15.18)।



(a) ऊर्ध्वाधर-अक्षे 75 किलोमीटरपरिमितस्य दूरे तस्य अनुरूप-तिर्यक्-अक्षे 2.5 घण्टाः लगिष्यन्ति। अतः 75 गन्तुं 2.5 घण्टाः भविष्यति।

(b) तिर्यक्-अक्षे $3\frac{1}{2}$ घण्टा-अनुरूपे ऊर्ध्वाधर-अक्षे 105 किलोमीटरस्य दूरी प्राप्यते।

प्रश्नावली 15.3

1. उपयुक्त-मानदण्डस्य उपयोगं कुर्वन्तः निम्न-तालिकायां दत्त-राशीनां कृते आलेखं रचयन्तु।

(a) सेवफलानां मूल्यम्

सेवफलानां संख्या	1	2	3	4	5
मूल्यम् (रुप्यकेषु)	5	10	15	20	25

(b) कारयानेन प्राप्ता दूरी -

समयः (घण्टासु)	प्रातः 6 वादने	प्रातः 7 वादने	प्रातः 8 वादने	प्रातः 9 वादने
दूरी (किलोमीटरपरिमिते)	40	80	120	160

(i) प्रातः 7.30 वादनतः 8 वादनान्तराले कारयानेन कियत् दूरी प्राप्ता ?

(ii) कारयानस्य 100 किलोमीटरपरिमितं दूरी प्राप्ते सति समयः कः आसीत् ?

(c) सञ्चित-धने वार्षिकः वृद्धिः -

सञ्चित-धनम् (रुप्यकेषु)	1000	2000	3000	4000	5000
साधारण-कुसीदः (रुप्यकेषु)	80	160	240	320	400

(i) किम् आलेखः मूल गच्छति ?

(ii) आलेखात् 2500 रुप्यकस्य वार्षिक-वृद्धिं जानन्तु।

(iii) 280 रुप्यकात्मकं वृद्धिं प्राप्तुं कियत् धनं सञ्चितं

2. निम्न-तालिकानां कृते आलेखं रचयन्तु।

(i)

वर्गस्य भुजः (सेण्टीमीटरपरिमिते)	2	3	3.5	5	6
परिमापः (सेण्टीमीटरपरिमिते)	8	12	14	20	24

किम् एषः रैखिकः आलेखः अस्ति ?

(ii)

वर्गस्य भुजः (सेण्टीमीटरपरिमिते)	3	3	4	5	6
क्षेत्रफलम् (वर्ग. सेमी)	4	9	16	25	36

किम् एषः रैखिक-आलेखः अस्ति ?

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. आलेखीय-चित्रणस्य बोधः सरलः भवति।

2. (i) दण्ड-आलेखः विभिन्न-श्रेणीनां तोलनार्थम् उपयुक्तः भवति।

(ii) वृत्त-चित्रम् अथवा वृत्त-आलेखः एकस्य सम्पूर्णस्य विभिन्न-भागानां तोलनार्थम् उपयुक्तः भवति।

(iii) आयत-चित्रम्, नैरन्तर्य-अन्तरालयुक्तानां गणनानां कृते दण्ड-आलेखः भवति।

3. रेखा-आलेखः समयस्य अन्तरालेन सह गणनायां परिवर्तनं दर्शयति।

4. रेखा-आलेखः यः एकः पूर्ण-अखण्डितरेखा भवेत् , एकः रैखिक-आलेखः इति उच्यते।

5. वर्गाङ्कितकागदे कस्य अपि बिन्दोः निर्धारणार्थम् अस्माकं कृते x- निर्देशाङ्कस्य y- निर्देशाङ्कस्य च आवश्यकता अस्ति।

6. एकस्मिन् स्वतन्त्र-चरे आश्रित-चरे च विद्यमानः सम्बन्धः एकेन आलेखेन प्रदर्शितः भवति।